Opakování:

kofaktor $\hat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} |\bar{A}_{ij}|$, kde

$\bar{A}_{ij}$: vznikne odebráním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Věta: (Výpočet A^{-1} pomocí kofaktorů)

Utvořme matici $\hat{A}$ kofaktorů $\hat{A}_{ij}$. Potom platí

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\hat{A})^T}$$

Př $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = ?$

$\hat{A}_{11} = (-1)^2 \cdot |4| = 4$

$\hat{A}_{12} = (-1)^3 \cdot |3| = -3$

$\hat{A}_{21} = (-1)^3 \cdot |2| = -2$

$\hat{A}_{22} = (-1)^4 \cdot |1| = 1$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\hat{A})^T = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

přednáška 2. 11. (Obadalová)

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

- Soustava m lin. rovnic o n neznámých $x_1, \dots, x_n$:

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}}$$

- $A = (a_{ij})$ ... matice soustavy
  $b = (b_i)$ ... sloupec pravých stran
  $\bar{A} = (a_{ij} | b_i)$ ... rozšířená matice soustavy
  $x = (x_j)$ ... sloupec neznámých
- Soustavu můžeme psát $Ax = b$
- n-tice $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ je <u>řešením</u> soustavy, jestliže platí $A\, x_0^T = b$.
- množinu všech řešení soustavy nazýváme <u>obecné řešení soustavy</u>
- soustavy jsou <u>ekvivalentní</u>, jestliže mají stejná obecná řešení

Př: Příklad soustavy 2 rovnic o 3 neznámých

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -11 \\ -5x_1 - 2x_3 &= 10 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -11 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -11 \\ -5 & 0 & -2 & 10 \end{array}\right)$$

$$\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}$$

<u>Věta</u>: Element. řádk. úpravy rozšířené matice soustavy nemění množinu řešení.

<u>Frobeniova věta</u>:
Soustava lin. rovnic má alespoň 1 řešení $\Leftrightarrow$ se hodnost matice soustavy rovná hodnosti rozšířené matice soustavy.

věta udává nutnou a postačující podmínku pro existenci řešení.

Důkaz: Upravíme rozš. matici soustavy $(A|b)$ na schodovitý tvar $(A'|b')$.
Předpokládejme že $rk(A')$ je l, ale $rk(A'|b')$ je $l+m$ (ten. větší)

Př $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $rk(A') = 2$

$(A'|b') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$ $rk(A'|b') = 3$

$(A|b)$ a $(A'|b')$ musí mít stejnou hodnost

Potom řádek $l+m$ (poslední řádek ve kterém jsou v A' už samé nuly, ale prvek b'_{l+m} je nenulový) vypadá následovně:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b'_{l+m}$$

což při nenulovém b'_{l+m} nemůže nastat.
Musí tedy platit $rk(A') = rk(A'|b')$.
a tedy i $rk(A) = rk(A|b)$.

Př $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $rk(A') = 2$, $rk(A'|b') = 2$

z nulových řádků víme
$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$
(nekonečná množina řešení)
z nenulových řádků dostaneme obecné řešení (některé proměnné se mohou vyskytovat jako parametry). □

Def. Soustava $Ax = b$ se nazývá **homogenní** $\Leftrightarrow b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Tzn. $Ax = 0$

Věta: Homogenní systém lin. rovnic má vždy řešení.

Důkaz. Nulové řešení $x = (0, \dots, 0)$ je vždy řešením tohoto systému

i-tý řádek: $a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + \dots + a_{in} \cdot 0 = 0$ □

Věta. Lineární kombinace řešení homog. soustavy je také řešením této soustavy.

Př 2 řešení: $x' = (x_1', x_2', \dots, x_n')$
$x'' = (x_1'', x_2'', \dots, x_n'')$

lin. kombinace: $s \cdot x' + t \cdot x'' =$
$= (sx_1' + tx_1'', sx_2' + tx_2'', \dots, sx_n' + tx_n''),$
kde $s, t \in \mathbb{R}$

Def: <u>Fundamentální systém řešení</u> je taková množina řešení homogenní soustavy, která je lin. nezávislá a každé jiné řešení lze vyjádřit jako lin. kombinaci řešení z této množiny.

Věta: Fundament. systém řešení soustavy rovnic $Ax=0$ o n neznámých má $(n-\mathrm{rk}(A))$ prvků.

Důkaz: Musí platit $n \geq \mathrm{rk}(A)$. Upravíme-li matici systému na schodovitý tvar, dostaneme přesně $n-\mathrm{rk}(A)$ proměnných jako parametry, protože $(n-\mathrm{rk}(A)) =$ počtu nulových řádků A. Tyto parametry volíme nezávisle, nejlépe $(1,0,\dots,0)^T, (0,1,0,\dots,0)^T, \dots, (0,\dots,0,1)^T$ ostatní proměnné pomocí těchto parametrů dopočítáme. Nezávislé řešení nedostaneme, tzn. počet řešení (lin. nez.) je $n-\mathrm{rk}(A)$. □

Nehomogenní soustavy lin. r-ic.

Def: Buď $Ax=b$ soustava, pak $Ax=0$ se nazývá <u>homogenizovaná</u> soustava.

Tzn. sloupec b nahradíme nulami.

Věta: Nechť x_p je nějaké řešení soustavy $Ax=b$. Potom každé řešení x této soustavy lze psát ve tvaru $x = x_p + x_0$, kde x_0 je řešení homogenizované soustavy.

x_p nazýváme <u>partikulární řešení</u>.

Množina všech řešení soustavy tedy bude $\{ x_p + x_0 \ ; \ \text{kde } x_0 \text{ je ř. hom. s.} \}$

Věta: Soustava s invertibilní maticí A má pro každou pravou stranu jediné řešení. $x = A^{-1}b$

<u>Cramerovo pravidlo</u>:

Buď $Ax=b$ soustava s invertibilní maticí A a řešením $x=(x_1,\dots,x_n)^T$. Pak

$$\boxed{\forall i \in \{1,\dots,n\}: \quad x_i = \frac{\det A_i}{\det A}}\ ,$$

kde A_i vznikne záměnou i-tého sloupce za sloupec pravých stran b.

Př

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &= -14 \\ x_1 - 4x_2 &= 8 \end{aligned}$$

$$A \quad \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & -14 \\ 1 & -4 & 8 \end{array}\right) \qquad x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -14 & 2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \qquad \det A_1 = +56 - 16 = 40$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -3 & -14 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad \det A_2 = -24 + 14 = -10$$

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10$$

$$x_1 = \frac{40}{10} = \underline{\underline{4}}$$

$$x_2 = \frac{-10}{10} = \underline{\underline{-1}}$$

Postup pomocí 1. věty:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & -14 \\ 1 & -4 & 8 \end{array}\right)\begin{matrix} + \\ \cdot 3 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -10 & 10 \\ 1 & -4 & 8 \end{array}\right)\begin{matrix} \cdot\left(-\frac{1}{10}\right) \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 8 \end{array}\right)\begin{matrix} \cdot 4 \\ + \end{matrix} \sim \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{array}\right)} \end{array}$$

$$\underline{\underline{x_1 = 4}}$$

$$\underline{\underline{x_2 = -1}}$$